

УДК 517.95

**О КОРРЕКТНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ  
ДЛЯ ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ  
ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА**

С.Ф.БАБАЕВА

*Бакинский Государственный Университет**seva\_babaeva@mail.ru*

*В работе получены условия корректной разрешимости некоторой нелокальной краевой задачи для операторно-дифференциального уравнения третьего порядка на полусоси. При этом получены оценки норм операторов промежуточных производных в абстрактных пространствах типа Соболева. Все условия разрешимости выражены через операторные коэффициенты, входящие в операторно-дифференциальное уравнение и в краевые условия.*

**Ключевые слова:** *гильбертово пространство, операторно-дифференциальное уравнение, краевая задача, самосопряженный оператор.*

Пусть  $H$  – сепарабельное гильбертово пространство,  $A$  – положительно-определенный самосопряженный оператор в  $H$ , а  $H_\gamma = D(A^\gamma)$  – гильбертово пространство относительно скалярного произведения  $(x, y)_\gamma = (A^\gamma x, A^\gamma y)$ ,  $\gamma \geq 0$ ,  $H_0 \equiv H$ . Обозначим через  $L_2(R_+; H)$  гильбертово пространство вектор-функций  $f(t)$ , определенных почти всюду в  $R_+(0; \infty)$ , со значениями в  $H$ , измеримых, квадратично интегрируемых в смысле Бохнера и

$$\|f\|_{L_2(R_+; H)} = \left( \int_0^{+\infty} \|f(t)\|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Следуя монографии [1], введем гильбертово пространство

$$W_2^3(R_+; H) = \left\{ u : u''' \in L_2(R_+; H), A^3 u \in L_2(R_+; H) \right\}$$

с нормой  $\|u\|_{W_2^3(R_+; H)} = \left( \|u'''\|_{L_2(R_+; H)}^2 + \|A^3 u\|_{L_2(R_+; H)}^2 \right)^{1/2}$ . Здесь и в дальнейшем про-

изводные понимаются в смысле теории распределений в гильбертовом пространстве [1].

Пусть  $L(X;Y)$  – банахово пространство линейных ограниченных операторов, действующих из пространства  $X$  в пространство  $Y$ . Предположим, что  $K \in L(W_2^3(R_+;H), H_{3/2})$  и определим пространство  $W_{2,K}^3(R_+;H) = \{u : u'(0) = Ku, u''(0) = 0\}$ . Из теоремы о следах [1] следует, что  $W_{2,K}^3(R_+;H)$  – полное гильбертово подпространство пространства  $W_2^3(R_+;H)$ . Аналогично определяются пространства  $L_2(R;H)$  и  $W_2^3(R;H)$  при  $R = (-\infty, \infty)$ .

Рассмотрим в пространстве  $H$  краевую задачу

$$P(d/dt)u = u''' - A^3u + \sum_{j=0}^3 A_{3-j}u^{(j)} = f(t), \quad t \in R_+, \quad (1)$$

$$u'(0) = Ku, \quad u''(0) = 0, \quad (2)$$

где  $f(t)$ ,  $u(t)$  – вектор-функции со значениями в  $H$ , а операторные коэффициенты удовлетворяют условиям:

- 1)  $A$  – положительно-определенный самосопряженный оператор;
- 2) операторы  $B_j = A_j A^{-j} \in L(H;H)$ ,  $j = \overline{0,3}$ ;
- 3)  $K \in L(W_2^3(R_+;H), H_{3/2})$ , причем  $\kappa = \|K\|_{W_2^3(R_+;H) \rightarrow H_{3/2}}$ .

Определим следующие операторы в  $W_{2,K}^3(R_+;H)$ :

$$P_0 u = P_0(d/dt)u(t) = u''' - A^3u,$$

$$P_1 = P_1(d/dt)u = \sum_{j=0}^3 A_{3-j}u^{(j)}, \quad P u = P_0 u + P_1 u, \quad u \in W_{2,K}^3(R_+;H).$$

В данной работе мы укажем, что оператор  $P$  осуществляет изоморфизм из пространства  $W_{2,K}^3(R_+;H)$  на  $L_2(R_+;H)$ .

**Теорема 1.** Пусть выполняются условия 1), 3) и  $\kappa < 1$ . Тогда оператор  $P_0$  осуществляет изоморфизм между пространствами  $W_{2,K}^3(R_+;H)$  и  $L_2(R_+;H)$ .

**Доказательство.** Сперва докажем, что  $\text{Ker} P_0 = \{0\}$ . Так как общее решение уравнения  $P_0(d/dt)u(t) = 0$  из пространства  $W_2^3(R_+;H)$  имеет вид:

$$u_0(t) = e^{\omega_1 t A} x_1 + e^{\omega_2 t A} x_2,$$

где  $\omega_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\omega_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $x_1, x_2 \in H_{5/2}$ , то из условия  $u_0(t) \in W_{2,K}^3(R_+;H)$  получаем, что

$$\begin{cases} \omega_1^2 x_1 + \omega_2^2 x_2 = 0, \\ \omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 = A^{-1} K (e^{\omega_1 t A} x_1 + e^{\omega_2 t A} x_2). \end{cases}$$

Учитывая, что  $x_2 = -\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} x_1$ , из второго уравнения получаем

$$x_1 = -\frac{1}{i\sqrt{3}} A^{-1} K (\omega_1 e^{\omega_1 t A} x_1 - \omega_2 e^{\omega_2 t A} x_1) \equiv Q x_1. \quad (3)$$

Так как  $\|Q x_1\|_{H_{5/2}} = \left\| \frac{1}{\sqrt{3}} A^{3/2} K (\omega_1 e^{\omega_1 t A} x_1 - \omega_2 e^{\omega_2 t A} x_1) \right\| \leq \frac{\kappa}{\sqrt{3}} \|\omega_1 e^{\omega_1 t A} x_1 - \omega_2 e^{\omega_2 t A} x_1\|$ ,

то из результатов работы [2] следует, что

$$\|\omega_1 e^{\omega_1 t A} x_1 - \omega_2 e^{\omega_2 t A} x_1\|_{W_2^3(R_+; H)}^2 = 8 \left\| A^3 \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} itA\right) x_1 \right\|^2 \leq 8 \cdot \frac{3}{8} \|x_1\|_{H_{5/2}}^2 = 3 \|x_1\|_{H_{5/2}}^2.$$

Следовательно,  $\|Q\|_{H_{5/2} \rightarrow H_{5/2}} \leq \kappa < 1$ . Тогда из (3) следует, что  $x_1 = 0$ . Тогда и вектор  $x_2 = 0$ , т.е.  $u_0(t) = 0$ . Таким образом,  $\text{Ker} P_0 = \{0\}$ . Теперь покажем, что  $\text{Jm} P_0 = L_2(R_+; H)$ .

С этой целью, докажем, что уравнение  $P_0 u = f$  разрешимо при всех  $f \in L_2(R_+; H)$ . Так как [2]

$$u_1(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (-i\zeta^3 E - A^3)^{-1} \left( \int_0^{+\infty} f(s) e^{i\zeta(t-s)} ds \right) d\zeta.$$

Удовлетворяет уравнению  $P_0(d/dt)u(t) = f(t)$  при  $t \in R_+$ , а  $u_1(t) \in W_2^3(R_+; H)$ , то его сужение  $\bar{u}_1(t) \in W_2^3(R_+; H)$  и  $P_0(d/dt)\bar{u}_1(t) = f(t), t \in R_+$ . Решение уравнения  $P_0 u = f$  будем искать в виде  $u(t) = \bar{u}_1(t) + e^{\omega_1 t A} x_1 + e^{\omega_2 t A} x_2$ ,  $x_1, x_2 \in H_{5/2}$ . Используя условия  $u''(0) = 0$  и  $u'(0) = K u$ , для определения  $x_1, x_2$  получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \omega_1^2 x_1 + \omega_2^2 x_2 = -A^{-2} \bar{u}_1''(0), \\ \omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 - A^{-1} K (e^{\omega_1 t A} x_1 + e^{\omega_2 t A} x_2) = -A^{-1} \bar{u}_1'(0) + A^{-1} K (\bar{u}_1(t)) \end{cases}$$

Так как  $A^{-2} \bar{u}_1''(0) \in H_{5/2}$ ,  $A^{-1} \bar{u}_1'(0) \in H_{5/2}$ ,  $A^{-1} K (\bar{u}_1(t)) \in H_{5/2}$ , то используя обратимость оператора  $Q$  в пространстве  $H_{5/2}$ , мы однозначно определяем  $x_1, x_2 \in H_{5/2}$ . Следовательно, решение уравнения  $P_0 u = f$  есть вектор-функция  $u = \bar{u}_1 + e^{\omega_1 t A} x_1 + e^{\omega_2 t A} x_2$ ,  $x_1, x_2 \in H_{5/2}$ . Таким образом,  $\text{Jm} P_0 = L_2(R_+; H)$ . Так как

$$\|P_0 u\|_{L_2(R_+; H)} \leq \sqrt{2} \|u\|_{W_2^3(R_+; H)}, \quad (4)$$

то по теореме Банаха об обратном операторе существует ограниченный оператор  $P_0^{-1} : L_2(R_+; H) \rightarrow W_{2,K}^3(R_+; H)$ . Теорема доказана.

Имеет место следующая

**Лемма.** Пусть выполняются условия 1), 3) и  $\kappa < 1$ . Тогда при  $u \in W_{2,K}^3(R_+; H)$  имеет место неравенство

$$\|P_0 u\|_{L_2(R_+; H)}^2 \geq (1 - \kappa) \|u\|_{W_2^3(R_+; H)}^2. \quad (5)$$

**Доказательство.** Пусть  $u \in W_{2,K}^3(R_+; H)$ . Тогда

$$\|P_0 u\|_{L_2(R_+; H)}^2 = \|u''' - A^3 u\|_{L_2(R_+; H)}^2 = \|u\|_{W_2^3(R_+; H)}^2 - 2 \operatorname{Re}(u''', A^3 u)_{L_2(R_+; H)}.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} (u''', A^3 u)_{L_2(R_+; H)} &= -(A^{1/2} u''(0), A^{5/2} u(0)) + (A^{3/2} u'(0), A^{3/2} u'(0)) - \\ &- (A^{5/2} u(0), A^{1/2} u''(0)) - (A^3 u, u''')_{L_2(R_+; H)}, \end{aligned}$$

т.е.  $2 \operatorname{Re}(u''', A^3 u) = \|u'(0)\|_{3/2}^2$ . Таким образом,

$$\|P_0 u\|_{L_2(R_+; H)}^2 = \|u\|_{W_2^3(R_+; H)}^2 - \|u'(0)\|_{3/2}^2 \geq \|u\|_{W_2^3(R_+; H)}^2 - \kappa \|u\|_{W_2^3(R_+; H)}^2 = (1 - \kappa) \|u\|_{W_2^3(R_+; H)}^2.$$

Лемма доказана.

Справедлива следующая

**Теорема 2.** Пусть выполняются условия 1), 3) и  $\kappa < 1$ . Тогда при любом  $u \in W_{2,K}^3(R_+; H)$  имеют места следующие неравенства:

$$\|A^{3-j} u^{(j)}\|_{L_2(R_+; H)} \leq c_j(\kappa) \|P_0 u\|_{L_2(R_+; H)}, \quad j = 0, 1, 2, 3, \quad (6)$$

где  $c_0(\kappa) = c_3(\kappa) = (1 - \kappa)^{-1/2}$ ,  $c_1(\kappa) = \frac{2^{1/3}}{3^{1/2}} (1 + \kappa^{2/3} 3^{1/2}) (1 - \kappa)^{-1/2}$ ,

$$c_2(\kappa) = \frac{2^{1/3}}{3^{1/2}} \left( 1 + \frac{3\kappa^{2/3}}{2^{1/3}} \right)^{1/2} (1 - \kappa)^{-1/2}.$$

**Доказательство.** Справедливость оценки (6) при  $j = 0$  и  $j = 3$  следует из леммы. При интегрировании по частям получаем:

$$\|A^2 u'\|_{L_2(R_+; H)}^2 = (A^2 u', A^2 u')_{L_2(R_+; H)} = -(A^{5/2} u(0), A^{3/2} u'(0)) - (A^3 u, Au'')_{L_2(R_+; H)}.$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} \|A^2 u'\|_{L_2(R_+; H)}^2 &\leq \|u(0)\|_{5/2} \|u'(0)\|_{3/2} + \|A^3 u\|_{L_2(R_+; H)} \|Au''\|_{L_2(R_+; H)} \leq \\ &\leq \kappa \|u\|_{W_2^3(R_+; H)} \|u(0)\|_{5/2} + \|A^3 u\|_{L_2(R_+; H)} \|Au''\|_{L_2(R_+; H)}. \end{aligned} \quad (7)$$

Так как

$$\|u(0)\|_{H_{5/2}}^2 = \|A^{5/2}u(0)\|_{L_2(R_+;H)}^2 = 2\operatorname{Re}(A^3u, A^2u')_{L_2(R_+;H)},$$

то

$$\|u(0)\|_{5/2} \leq 2^{1/2} \|A^3u\|_{L_2(R_+;H)}^{1/2} \|A^2u'\|_{L_2(R_+;H)}^{1/2}.$$

Поэтому из (7) следует, что

$$\|A^2u'\|_{L_2(R_+;H)}^2 \leq \kappa \|u\|_{W_2^3(R_+;H)} \cdot 2^{1/2} \|A^3u\|_{L_2(R_+;H)}^{1/2} \|A^2u'\|_{L_2(R_+;H)}^{1/2} + \|A^3u\|_{L_2(R_+;H)} \|Au''\|_{L_2(R_+;H)}. \quad (8)$$

Аналогично получаем

$$\|Au''\|_{L_2(R_+;H)}^2 = (Au'', Au'')_{L_2(R_+;H)} = -(A^2u', u''')_{L_2(R_+;H)} \leq \|A^2u'\|_{L_2(R_+;H)} \|u'''\|_{L_2(R_+;H)}. \quad (9)$$

Учитывая неравенства (9) в (8), получаем:

$$\|A^2u'\|_{L_2(R_+;H)}^2 \leq 2^{1/2} \kappa \|u\|_{W_2^3(R_+;H)} \|A^3u\|_{L_2(R_+;H)}^{1/2} \|A^2u'\|_{L_2(R_+;H)}^{1/2} + \|A^3u\|_{L_2(R_+;H)} \|A^2u'\|_{L_2(R_+;H)}^{1/2} \|u'''\|_{L_2(R_+;H)}^{1/2},$$

или

$$\begin{aligned} \|A^2u'\|_{L_2(R_+;H)}^{3/2} &\leq 2^{1/2} \kappa \|u\|_{W_2^3(R_+;H)} \|A^3u\|_{L_2(R_+;H)}^{1/2} + \|A^3u\|_{L_2(R_+;H)} \|u'''\|_{L_2(R_+;H)}^{1/2} \leq \\ &\leq 2^{1/2} \kappa \|u\|_{W_2^3(R_+;H)}^{3/2} + \|A^3u\|_{L_2(R_+;H)} \|u'''\|_{L_2(R_+;H)}^{1/2}, \end{aligned}$$

$$\|A^2u'\|_{L_2(R_+;H)} \leq 2^{1/3} \kappa^{2/3} \|u\|_{W_2^3(R_+;H)} + \|A^3u\|_{L_2(R_+;H)}^{2/3} \|u'''\|_{L_2(R_+;H)}^{1/3}. \quad (10)$$

При  $\varepsilon > 0$  по неравенству Юнга имеем:

$$\left( \|A^3u\|_{L_2(R_+;H)}^{2/3} \|u'''\|_{L_2(R_+;H)}^{1/3} \right)^2 = \left( \varepsilon \|A^3u\|_{L_2(R_+;H)}^2 \right)^{2/3} \left( \frac{1}{\varepsilon^2} \|u'''\|_{L_2(R_+;H)}^2 \right)^{1/3} \leq \frac{2}{3} \varepsilon \|A^3u\|_{L_2(R_+;H)}^2 + \frac{1}{3\varepsilon^2} \|u'''\|_{L_2(R_+;H)}^2$$

Полагая  $\frac{2}{3}\varepsilon = \frac{1}{3\varepsilon^2}$ , т.е.  $\varepsilon = 2^{-1/3}$ , получаем

$$\left( \|A^3u\|_{L_2(R_+;H)}^{2/3} \|u'''\|_{L_2(R_+;H)}^{1/3} \right)^2 \leq \frac{2^{2/3}}{3} \left( \|A^3u\|_{L_2(R_+;H)}^2 + \|u'''\|_{L_2(R_+;H)}^2 \right) = \frac{2^{2/3}}{3} \|u\|_{W_2^3(R_+;H)}^2.$$

Следовательно, из (10) следует, что

$$\|A^2u'\|_{L_2(R_+;H)} \leq 2^{1/3} \kappa^{2/3} \|u\|_{W_2^3(R_+;H)} + \frac{2^{1/3}}{3^{1/2}} \|u\|_{W_2^3(R_+;H)} = \left( 2^{1/3} \kappa^{2/3} + \frac{2^{1/3}}{3^{1/2}} \right) \|u\|_{W_2^3(R_+;H)}. \quad (11)$$

Действуя аналогично, из (9) и (10) получаем, что при  $\varepsilon = 2^{-1/3}$

$$\begin{aligned}
\|Au''\|_{L_2(R_+,H)}^2 &\leq \|A^2u'\|_{L_2(R_+,H)} \|u'''\|_{L_2(R_+,H)} \leq 2^{1/3} \kappa^{2/3} \|u\|_{W_2^3(R_+,H)} \|u'''\|_{L_2(R_+,H)} + \|A^3u\|_{L_2(R_+,H)}^{2/3} \|u'''\|_{L_2(R_+,H)}^{4/3} \leq \\
&\leq 2^{1/3} \kappa^{2/3} \|u\|_{W_2^3(R_+,H)}^2 + \left( \|A^3u\|_{L_2(R_+,H)}^2 \frac{1}{\varepsilon^2} \right)^{1/3} \left( \varepsilon \|u'''\|_{L_2(R_+,H)}^2 \right)^{2/3} \leq 2^{1/3} \kappa^{2/3} \|u\|_{W_2^3(R_+,H)}^2 + \frac{1}{3\varepsilon^2} \|A^3u\|_{L_2(R_+,H)}^2 + \\
&+ \frac{2}{3} \varepsilon \|u'''\|_{L_2(R_+,H)}^2 \leq 2^{1/3} \kappa^{2/3} \|u\|_{W_2^3(R_+,H)}^2 + \frac{2^{2/3}}{3} \|u\|_{W_2^3(R_+,H)}^2.
\end{aligned}$$

Отсюда имеем:

$$\|Au''\|_{L_2(R_+,H)} \leq \left( 2^{1/3} \kappa^{2/3} + \frac{2^{2/3}}{3} \right)^{1/2} \|u\|_{W_2^3(R_+,H)} = \frac{2^{1/3}}{3^{1/2}} \left( 1 + \frac{\kappa^{2/3} 3}{2^{1/3}} \right)^{1/2} \|u\|_{W_2^3(R_+,H)}. \quad (12)$$

Из неравенства (11) и (12) следует утверждение теоремы, так как по лемме

$$\|u\|_{W_2^3(R_+,H)} \leq (1-\kappa)^{-1/2} \|P_0u\|_{L_2(R_+,H)}.$$

Теорема доказана.

**Теорема 3.** Пусть выполняются условия 1) – 3) и  $\alpha(\kappa) = \sum_{j=0}^3 c_j(\kappa) \|B_{3-j}\| \leq 1$ ,

где числа  $c_j (j = \overline{0,3})$  определены в теореме 2. Тогда оператор  $P$  осуществляет изоморфизм между пространствами  $W_{2,\kappa}^3(R_+,H)$  и  $L_2(R_+,H)$ .

**Доказательство.** Примем уравнение  $Pu = f$  в виде  $P_0u + P_1u = f$ ,  $u \in W_{2,\kappa}^3(R_+,H)$   $f \in L_2(R_+,H)$ . После замены  $\vartheta = P_0u$  получаем уравнение  $\vartheta + P_1P_0^{-1}\vartheta = f$ . Так как по теореме 2

$$\|P_1P_0^{-1}\vartheta\|_{L_2(R_+,H)} = \|P_1u\|_{L_2(R_+,H)} \leq \sum_{j=0}^3 \|B_{3-j}\| \|A^{3-j}u^{(j)}\|_{L_2(R_+,H)} \leq \sum_{j=0}^3 c_j(\kappa) \|B_{3-j}\| = \alpha(\kappa) < 1,$$

то оператор  $E + P_1P_0^{-1}$  обратим в  $L_2(R_+,H)$  и  $u = P_0^{-1}(E + P_1P_0^{-1})^{-1}f$ , причем  $\|u\|_{W_2^3(R_+,H)} \leq \text{const} \|f\|_{L_2(R_+,H)}$ .

Теорема доказана.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971, 371 с.
2. Aliev A.R., Babayeva S.F. On the boundary value problem with the operator in boundary conditions for the operator-differential equations of the third order // Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry, 2010, v.6, № 4, pp.347-361.
3. Babayeva S.F. On regular solvability of a boundary problem with operator boundary condition // Transactions of NAS of Azerbaijan, 2010, v. XXX, № 4, p.25-34.
4. Kerimov K.A. On solvability of second order operator-differential equations with integral boundary conditions // Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan, 2008, v.28, №5, p.33-42.
5. Mamedov A.M. On a boundary value problem for third operator-differential equations //

- Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan, 2006, v.XXV(XXXIII), p.59-66.
6. Mamedov A.M. On solvability a boundary value problem for a class of third order differential equations with disconnected coefficients // Transactions of NAS of Azerbaijan, 2008, V.XXXIII, № 1, p.85-94.

**ÜÇÜNCÜ TƏRTİB OPERATOR-DİFERENSİAL TƏNLİK ÜÇÜN BİR SƏRHƏD  
MƏSƏLƏSİNİN KORREKT HƏLL OLUNMASI HAQQINDA**

**S.F.BABAYEVA**

**XÜLASƏ**

Təqdim olunmuş işdə yarımoxda üçüncü tərtib operator-diferensial tənlik üçün bir qeyri-lokal sərhəd məsələsinin korrekt həll olunması üçün şərtlər tapılmışdır. Sobolev tipli abstrakt fəzalarda aralıq törəmə operatorlarının normaları üçün qiymətləndirmələr alınmışdır. Həll olunmanın bütün şərtləri tənliyə və sərhəd şərtlərinə daxil olan operator əmsalları vasitəsilə ifadə olunmuşdur.

**Açar sözlər:** Hilbert fəzası, operator-diferensial tənlik, sərhəd məsələsi, öz-özünə qoşma operator.

**ON CORRECT SOLVABILITY OF A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR  
AN OPERATOR-DIFFERENTIAL EQUATION OF THE THIRD ORDER**

**S.F.BABAYEVA**

**SUMMARY**

In this paper conditions for correct solvability of some boundary value problem for the operator-differential equation of the third order on semi-axis are obtained. Estimates of the norms of the operators of intermediate derivatives in abstract Sobolev spaces are received. All conditions of solvability are expressed with the operator coefficients, which are included in the equation and boundary conditions.

**Key words:** Hilbert space, operator-differential equation, boundary value problem, self-adjoint operator.

*Принято в редакцию: 17.12.2012 г.*

*Подписано к печати: 06.03.2013 г.*